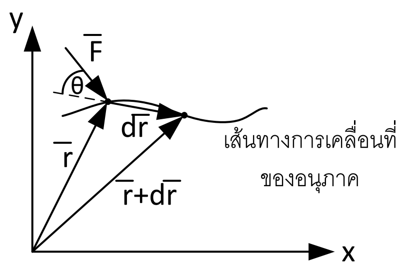
บทที่ 7
วิธีการงานเสมือน

ในการวิเคราะห์สมดุลในบทต่างๆ ที่ผ่านมา วัตถุหรือโครงสร้างที่พิจารณามักจะอยู่ในตำแหน่งที่สมดุล และต้องการหาแรงภายนอกหรือแรงตามจุดต่างๆ ที่เกิดขึ้นในสภาพสมดุลนั้น บางครั้งโครงสร้างที่พิจารณา อาจประกอบขึ้นจากชิ้นส่วนหลายๆ ส่วน ทำให้มีตำแหน่งที่สมดุลได้หลายตำแหน่ง ขึ้นอยู่กับขนาดของภาระที่กระทำอยู่บนโครงสร้าง ในกรณีเช่นนี้ วิธีการวิเคราะห์สมดุลตามปกติอาจทำได้ แต่ต้องการการคำนวณซ้ำ หรือใช้เวลาในการคำนวณมาก วิธีการหนึ่งที่เหมาะสมกับการวิเคราะห์ปัญหาในลักษณะนี้คือ วิธีการงานเสมือน (Virtual work) หลักการในการวิเคราะห์ด้วยวิธีการงานเสมือนจะได้กล่าวโดยละเอียดในบทนี้

7.1 งานและงานเสมือน

พิจารณาอนุภาคอันหนึ่งซึ่งอยู่ในพิกัดดังแสดงในรูปที่ 7.1 การระบุตำแหน่งของอนุภาคนี้ จะทำโดยใช้เวคเตอร์บอกตำแหน่ง (Position vector) เมื่อมีแรง $\overline{F}$ กระทำกับอนุภาค จะทำให้อนุภาคนี้เคลื่อนที่ไป ดังแสดงด้วยเส้นทางการเคลื่อนที่ในรูปที่ 7.1 ระยะทางที่วัตถุเคลื่อนที่ไปได้ แสดงด้วยเวคเตอร์ $d\overline{r}$ ซึ่งเป็นระยะทางที่วัตถุเคลื่อนไปได้เล็กๆ เมื่อเวลาผ่านไปเล็กน้อย (dt)



รูปที่ 7.1 แสดงการเคลื่อนที่ของอนุภาคในพิกัดฉาก

เราจะนิยามปริมาณที่เรียกว่า “งาน (work)” คือดอทโปรดักท์ของเวคเตอร์แรง และเวคเตอร์แสดงการเคลื่อนที่ของอนุภาค ในกรณีที่อนุภาคเคลื่อนที่ไปได้น้อยๆ ก็จะได้งานน้อย ๆ (du) หรือ

$$du = \overline{F} \cdot d\overline{r} \qquad (7.1)$$

เมื่อแทนสมการ (7.1) ด้วยความสัมพันธ์เชิงสเกลาร์ จะได้ว่า

$$du = Fdr\cos\theta \qquad (7.2)$$

โดย F คือ ขนาดของเวกเตอร์ $\overline{F}$

dr คือ ขนาดของเวกเตอร์ $d\overline{r}$

θ คือ มุมที่เวคเตอร์ $\overline{F}$ และ $d\overline{r}$ กระทำต่อกันดังแสดงในรูปที่ 7.1

ในกรณีที่ต้องการหาขนาดของงานทั้งหมดที่เกิดขึ้นตลอดการเคลื่อนที่ เราอาจทำได้โดยการหาปริพันธ์ (อินทิเกรต) สมการ(7.2) ซึ่งทำให้ได้ผลดังนี้

$$U = Fr\cos\theta \qquad (7.3)$$

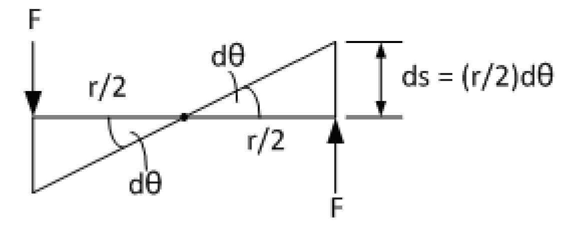
เมื่อกลับมาพิจารณาสมการ (7.1) จะพบว่า หากดำเนินการทางเวคเตอร์แล้วจะเขียนสมการ (7.1) ใหม่ได้เป็น

$$du = F_x dr_x + F_y dr_y + F_Z dr_Z \qquad (7.4)$$

จากสมการ (7.4) จะเห็นว่า งานที่เกิดจากแรงคูณกับระยะทางที่ขนานกับแนวแรงนั้น ดังนั้นหากมีแรงใดๆ เคลื่อนที่ไปตามแนวแรงเป็นระยะ ds จะเขียนได้ว่า

$$du = Fds \qquad (7.5)$$

สำหรับกรณีของแรงคู่ควบ เราอาจหางานที่เกิดขึ้นได้จากการหมุนของแรงคู่ควบโดยพิจารณารูปที่ 7.2 จากรูปมีแรงคู่ควบที่เกิดจากแรง F ห่างกันเป็นระยะทาง r



รูปที่ 7.2 แสดงการคิดงานจากแรงคู่ควบ

เมื่อกำหนดให้แรงคู่ควบนี้หมุนไปเป็นระยะ $d\theta$ จะพบว่าแรง F ทั้งคู่เคลื่อนที่ไปเป็นระยะ ds โดยระยะ ds หาได้จาก

$$ds = \frac{r}{2} d\theta \tag{7.6}$$

งานที่เกิดขึ้นจากแรงคู่ควบจะเกิดจากงานของแรงทั้งสองดังนั้น

$$du = Fds + Fds$$
$$du = 2F\left(\frac{r}{2} d\theta\right)$$
$$du = Frd\theta \tag{7.7}$$

หากเขียนเทอมแรงคู่ควบ Fr ด้วย M แล้วจะได้ว่า

$$du = Md\theta \tag{7.8}$$

สมการนี้เป็นสมการที่ใช้ในการคำนวณงานเนื่องจากโมเมนต์ในลักษณะของแรงคู่ควบ

งานที่หาได้จากสมการ (7.5) และสมการ (7.8) เป็นงานที่เกิดจากการที่แรง และโมเมนต์เกิดการเคลื่อนที่ไปจริงๆ หากการเคลื่อนที่นั้นไม่ได้เกิดขึ้นจริง แต่เป็นการเคลื่อนที่ที่เราจินตนาการว่าเสมือนเกิดขึ้นจริง งานที่ได้ก็จะเป็นงานที่ไม่ได้เกิดขึ้นจริง เราเรียกงานจากจินตนาการเช่นนี้ว่า “งานเสมือน (Virtual work)” เพื่อที่จะแยกความแตกต่างระหว่างงานเสมือนและงานจริง เราจะใช้สัญลักษณ์ "δ" แทนสัญลักษณ์ “d” เพื่อเป็นการบอกว่าปริมาณที่พิจารณาอยู่นั้นไม่ได้มีอยู่จริง แต่เป็นปริมาณที่จินตนาการขึ้นเท่านั้น

เหตุที่ต้องจินตนาการว่ามีการเคลื่อนที่เกิดขึ้นนั้น ก็เนื่องจากในการวิเคราะห์โครงสร้างที่มีความสมดุลอยู่แล้ว มันจะไม่เคลื่อนที่ ดังนั้นเพื่อให้สามารถใช้หลักการพลังงานในการวิเคราะห์โครงสร้างได้ จึงต้องจินตนาการว่าโครงสร้างนั้นมีการเคลื่อนที่ไปเล็กน้อย ดังนั้นงานที่เกิดจากแรงที่กระทำกับโครงสร้างที่เคลื่อนที่ไปเล็กน้อย (ในจินตนาการ) จะหาได้จาก

$$\delta U = F\delta s \tag{7.9}$$

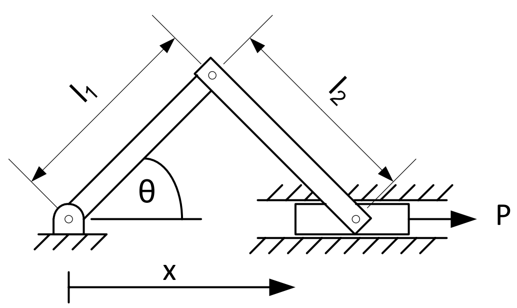
และ งานที่ได้จากการจินตนาการว่าโมเมนต์ในลักษณะแรงคู่ควบหมุนไปจะหาได้จาก

$$\delta U = M\delta\theta \tag{7.10}$$

7.2 องศาความเป็นอิสระ

องศาความเป็นอิสระ (Degree of freedom) หมายถึง จำนวนพิกัดอิสระ (Independent coordinates) ที่จำเป็นในการระบุตำแหน่งของจุดต่าง ๆ ในโครงสร้าง

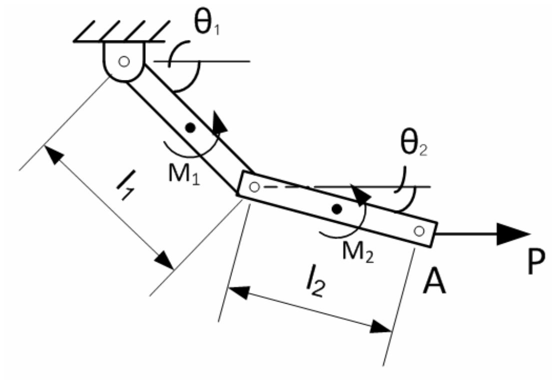
เพื่อให้เกิดความเข้าใจที่ดี จะพิจารณาโครงสร้างที่แสดงในรูปที่ 7.3 จากรูปจะพบว่ามีพิกัด 2 ตัวที่สามารถใช้ในการบอกตำแหน่งต่าง ๆ ของโครงสร้างนี้ นั่นคือ พิกัด x และพิกัด θ แต่จะพบว่า เราไม่จำเป็นต้องใช้พิกัดทั้งสองพร้อมกัน เพราะพิกัด x มีความสัมพันธ์กับพิกัด θ (หาตำแหน่ง x ได้จากการรู้มุม θ) ดังนั้นพิกัดอิสระในกรณีนี้จึงมีเพียง 1 พิกัด และสรุปได้ว่าโครงสร้างนี้มีองศาความเป็นอิสระเท่ากับหนึ่ง



รูปที่ 7.3 ตัวอย่างในการพิจารณาองศาความเป็นอิสระ

คราวนี้ลองพิจาณาโครงสร้างในรูปที่ 7.4 จากรูปจะพบว่าในการระบุตำแหน่งของจุด A เราไม่สามารถบอกได้โดยการใช้ข้อมูลพิกัด θ_1 เท่านั้น เพราะปลายชิ้นส่วนที่จุด A อยู่ อาจแกว่งไปอยู่ในตำแหน่งใดก็ได้ เมื่อ θ_1 มีค่าค่าหนึ่ง ดังนั้น การระบุตำแหน่งของจุด A ต้องทราบค่ามุม θ_1 และมุม θ_2 ดังนั้นโครงสร้างนี้จะมีพิกัดอิสระเท่ากับสอง

ค่าองศาความเป็นอิสระของโครงสร้างนี้ จะเป็นตัวบอกถึงจำนวนสมการงานเสมือนที่จะเกิดขึ้นในการวิเคราะห์สมดุลด้วยวิธีการงานเสมือน กล่าวคือ จำนวนสมการงานเสมือนที่เกิดขึ้นจะเท่ากับองศาความเป็นอิสระของโครงสร้าง



รูปที่ 7.4 แสดงโครงสร้างที่มีองศาความอิสระเท่ากับสอง

7.3 หลักการงานเสมือน

หลักการงานเสมือน (Principle of virtual work) เป็นหลักการที่ใช้ในการวิเคราะห์สมดุลของโครงสร้าง เนื้อหาของหลักการมีอยู่ว่า “หากโครงสร้างที่พิจารณาอยู่ในสภาวะสมดุลแล้ว ผลรวมงานเสมือนที่เกิดขึ้นบนโครงสร้าง จากการจินตนาการว่าโครงสร้างนั้นเคลื่อนที่ไปเล็กน้อยมีค่าเท่ากับศูนย์” หรือเขียนสมการได้เป็น

$$\delta U = 0 \qquad (7.11)$$

สมการนี้เรียกว่า สมการงานเสมือน ซึ่งเป็นสมการที่ใช้ในกรณีที่โครงสร้างสมดุล

ขั้นตอนในการวิเคราะห์สมดุลด้วยวิธีการงานเสมือนมีดังนี้

1. เขียนแผนภูมิอิสระของโครงสร้าง

2. ร่างแนวการเคลื่อนตัวของโครงสร้างเมื่อมีการเคลื่อนที่ไปเล็กน้อย โดยกำหนดให้โครงสร้างเคลื่อนตัวไปในทิศพิกัดที่เป็นบวก

3. ตัดแรงและโมเมนต์ที่ไม่ทำให้เกิดงานออกจากแผนภูมิอิสระ แรงและโมเมนต์ชนิดนี้เรียกว่า ภาระรีแอคทีฟ (Reactive load) ส่วนแรงและโมเมนต์ที่ทำให้เกิดงานจะยังคงไว้ในรูปแผนภูมิอิสระ แรงและโมเมนต์ที่ทำให้เกิดงานเรียกว่า ภาระแอคทีฟ (Active load)

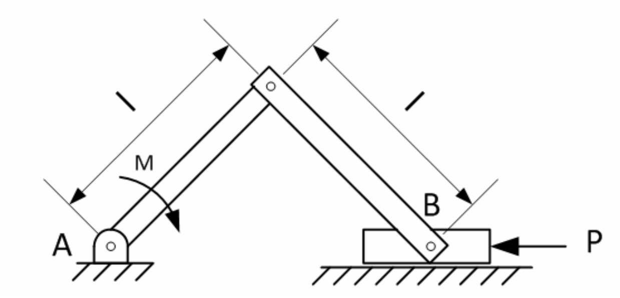
4. กำหนดพิกัดอ้างอิงเพื่อใช้ระบุตำแหน่งของภาระแอคทีฟในโครงสร้าง ในการกำหนดพิกัดอ้างอิงนี้ อาจกำหนดได้หลายพิกัดแต่ต้องระลึกไว้เสมอว่า พิกัดที่กำหนดขึ้นจะต้องสัมพันธ์กับพิกัดอิสระ (ซึ่งมีจำนวนเท่ากับค่าองศาความเป็นอิสระ) นอกจากนี้การตั้งพิกัดอ้างอิงควรตั้งบนจุดหยุดนิ่ง (Fixed point) และแสดงการวัดเทียบกับพิกัดให้ชัดเจน เพราะการตั้งระบบการวัดบนพิกัดอ้างอิง หรือ การกำหนดพิกัดอ้างอิงที่แตกต่างกันจะทำให้ได้รูปสมการคำตอบที่แตกต่างกัน (แต่จะให้ผลลัพธ์เชิงตัวเลขที่เท่ากัน)

5. เขียนสมการงานเสมือน ในขั้นตอนนี้เพื่อให้เกิดความสะดวกในการคิดเครื่องหมายของงาน พึงระลึกไว้เสมอว่า δs และ $\delta\theta$ จะมีค่าเป็นบวก และชี้ไปทางเดียวกับทิศทางที่กำหนดพิกัดเป็นค่าบวกเสมอ และงานที่เกิดจากแรงหรือโมเมนต์จะมีค่าเป็นบวก เมื่อมันมีทิศไปทางเดียวกับค่าพิกัดที่เป็นบวก หากมันมีทิศทางสวนทางกับค่าพิกัดที่กำหนดให้เป็นบวก งานนั้นจะมีค่าเป็นลบ (ลองวิเคราะห์จากหลักการของงานในสมการ (7.1) ประกอบ จะเข้าใจได้ว่าทำไมจึงกำหนดการคิดเครื่องหมายเช่นนี้)

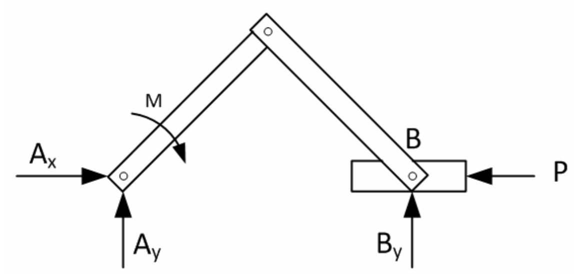
6. หาความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดต่างๆ เพื่อให้สมการงานเสมือนที่เขียนขึ้นมีจำนวนพิกัดอิสระเท่ากับองศาความเป็นอิสระของโครงสร้าง (เครื่องหมายบวก และลบของเทอมต่างๆ อาจเปลี่ยนไปในขั้นตอนนี้)

7. หาคำตอบจากการแก้สมการงานเสมือน

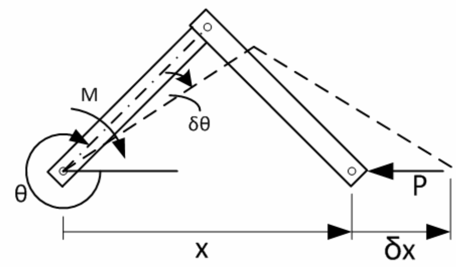
ตัวอย่าง 7.1 จากรูปจงหาขนาดโมเมนต์ที่ทำให้โครงสร้างนี้อยู่ในสภาพสมดุล หากโครงสร้างนี้มีแรง P กระทำอยู่



วิธีทำ เขียนแผนภูมิอิสระของโครงสร้างได้ดังนี้



FBD ของโครงสร้าง



รูปสำหรับวิเคราะห์งานเสมือน

จากรูป FBD ของโครงสร้างและรูปสำหรับวิเคราะห์งานเสมือนจะเห็นว่า แรง A_x และ A_y ไม่เคลื่อนที่ ดังนั้นแรงสองแรงนี้ไม่ต้องนำมาพิจารณางานเสมือน นอกจากนี้ จะเห็นว่า แรง B_y แม้ว่ามันจะเคลื่อนที่ แต่แนวการเคลื่อนที่ของแรง B_y ตั้งฉากกับแรง B_y ดังนั้น งานจากแรง B_y จึงเป็นศูนย์ และไม่ต้องนำแรง B_y มาวิเคราะห์ด้วย

รูปวิเคราะห์งานเสมือนที่เขียนขึ้นนี้ เกิดจากการกำหนดให้โครงสร้างเคลื่อนตัวไปในทิศทางที่พิกัดเป็นบวก

ในขณะนี้ δx และ $\delta\theta$ มีค่าเป็นบวกเสมอ ดังนั้นงานที่เกิดจากแรง P จะมีค่าเป็นลบเพราะแรง P มีทิศสวนกับพิกัดของ δx และงานที่เกิดจากโมเมนต์จะมีค่าเป็นบวกเพราะมีทิศทางเดียวกับพิกัดบวกของ $\delta\theta$ ดังนั้นเขียนสมการงานเสมือนได้เป็น

$$M\delta\theta - P\delta x = 0$$

จากรูปสำหรับวิเคราะห์งานเสมือนเราจะพบว่า

$$x = 2\ell\cos\theta$$

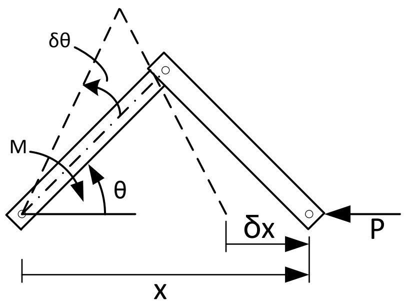
ดังนั้น $\delta x = -2\ell \sin\theta\delta\theta$

แทนค่า δx ลงในสมการงานเสมือนจะได้ว่า

$$M\delta\theta + P(2\ell\sin\theta\delta\theta) = 0$$

$$M = -2P\ell\sin\theta \qquad \text{(A)}$$

คราวนี้เราจะลองทำการคำนวณซ้ำอีกครั้ง โดยกำหนด พิกัด θ ใหม่ โดยให้มันมีทิศบวกทวนเข็มนาฬิกาดังนี้



จากขั้นตอนการคำนวณในข้อ 5 δx ในกรณีนี้มีเครื่องหมายเป็นบวกเพราะมันมีทิศไปทางเดียวกับพิกัด และค่า P สวนกับพิกัด x ดังนั้นงานจากแรง P จะมีค่าเป็นลบ เมื่อพิจารณางานจากโมเมนต์ M จะเห็นว่ามันมีทิศสวนกับพิกัด θ ที่กำหนดไว้ ดังนั้นงานจากโมเมนต์จะมีค่าเป็นลบ เราเขียนสมการเสมือนได้ดังนี้

$$-M\delta\theta - P\delta x = 0$$

จากรูปสำหรับวิเคราะห์งานเสมือน ; $x = 2\ell\cos\theta$

ดังนั้น $\delta x = -2\ell\sin\theta\delta\theta$

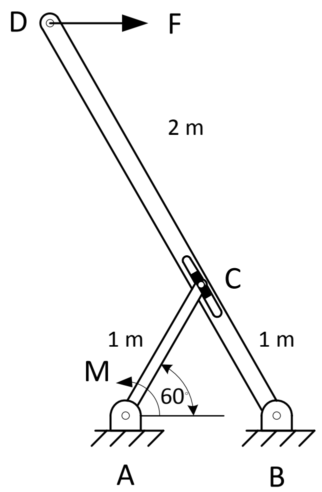
แทนค่า δx ลงในสมการเสมือนจะได้ว่า

$$-M\delta\theta + 2P\ell\sin\theta\delta\theta = 0$$

$$M = 2P\ell\sin\theta \qquad \text{(B)}$$

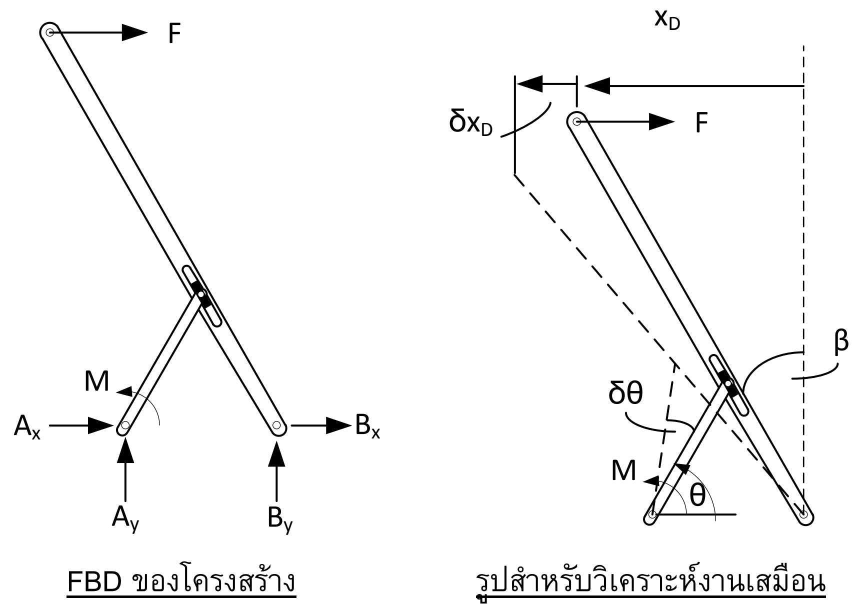
สมการคำตอบที่ได้นี้ จะมีเครื่องหมายแตกต่างจากสมการคำตอบจากสมการ (A) ที่ได้จากการคำนวณตอนต้น ที่เป็นเช่นนี้เนื่องจากพิกัด θ ที่ใช้แตกต่างกัน ในกรณีแรกพิกัด θ วัดตามเข็มนาฬิกา สำหรับกรณีหลังพิกัด θ วัดทวนเข็มนาฬิกา อย่างไรก็ดีคำตอบเชิงตัวเลขที่ได้จากทั้งสมการ (A) และ (B) จะให้ค่าเท่ากัน

ตัวอย่าง 7.2 ก้าน AC ติดอยู่กับลูกเลื่อนไร้แรงเสียดทาน ซึ่งอยู่ในร่องบนก้าน BD พบว่าที่มุม 60 องศา โครงสร้างนี้อยู่ในสภาวะดังรูป จงหาแรง F ที่ทำให้โครงสร้างนี้สมดุล หากใส่โมเมนต์ขนาด 10 $N \cdot m$ ที่ก้าน AC



วิธีทำ เราทราบว่าสามเหลี่ยม ABC เป็นสามเหลี่ยมด้านเท่าที่ตำแหน่งมุม 60 องศา ดังนั้นระยะ AB = 1 เมตร

เขียนแผนภูมิอิสระและรูปสำหรับวิเคราะห์งานเสมือนได้ดังนี้



FBD ของโครงสร้าง รูปสำหรับวิเคราะห์งานเสมือน

เขียนสมการงานเสมือน ; $-F\delta x_D + M\delta\theta = 0$

จากรูปสามเหลี่ยมหน้าจั่วที่มีแขนของสามเหลี่ยมยาวเท่ากับ AB = AC = 1 เมตร และมีมุมยอด θ (ส่วนมุมที่ฐานของสามเหลี่ยมหน้าจั่วจะเท่ากัน) เราจะพบว่า

$$\beta = \frac{\theta}{2}$$

และ $x_D = \overline{BD}\sin\beta$

ดังนั้น $x_D = \overline{BD}\sin\frac{\theta}{2}$

$$\delta x_D = \frac{3}{2}\cos\frac{\theta}{2}\delta\theta$$

แทนค่าในสมการเสมือนจะได้ว่า

$$\frac{-3}{2}F\cos\frac{\theta}{2}\delta\theta + M\delta\theta = 0$$

$$F = \frac{2}{3}M\left(\frac{1}{\cos\frac{\theta}{2}}\right)$$

แทนค่า $\theta = 30, M = 10\, N \cdot m$

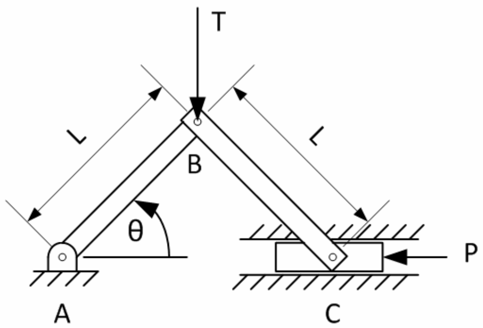
$$F = \frac{2}{3}(10)\left(\frac{1}{\cos 15^{\circ}}\right)$$

$$F = 6.90\, N$$

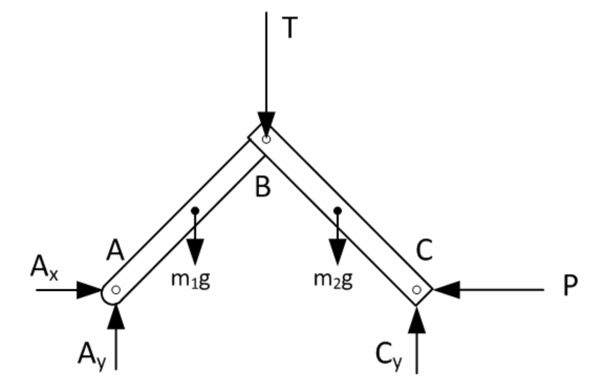
ดังนั้น แรง F ที่ทำให้โครงสร้างสมดุลที่มุม 30 องศามีค่า 6.90 N **ตอบ**

จากตัวอย่างนี้จะเห็นว่า การตั้งพิกัดอ้างอิงไม่จำเป็นต้องตั้งอยู่ที่จุดเดียวกัน หากเทียบตัวอย่าง 7.1และ 7.2 จะเห็นว่าการให้พิกัดระยะ x มีการกำหนดต่างกัน แต่อย่างไรก็ดีทั้งสองตัวอย่างมีสิ่งที่เหมือนกันคือ การติดตั้งพิกัดจะติดอยู่ที่จุดหยุดนิ่ง (Fixed point) เสมอ

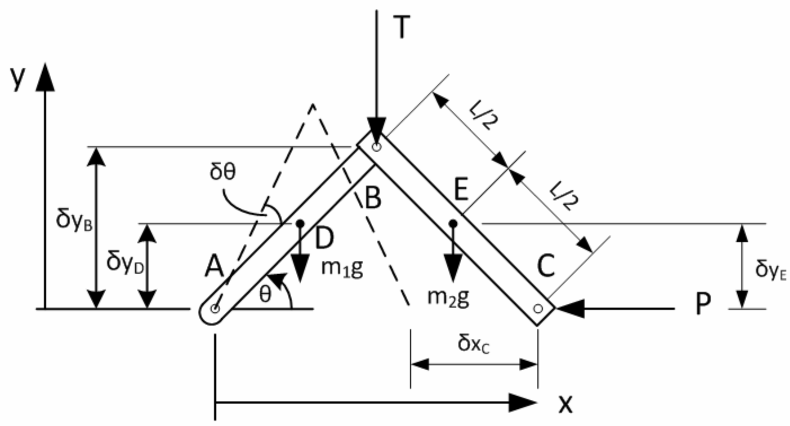
ตัวอย่าง 7.3 โครงสร้างดังรูปประกอบจากชิ้นส่วน AB และ BC โดยชิ้นส่วน AB หนัก 5 kg และชิ้นส่วน BC หนัก10 kg จงหาแรง P ที่ทำให้โครงสร้างนี้สมดุล หากมีแรง T ขนาด 200N กระทำกับโครงสร้างดังรูป



วิธีทำ จากรูปเขียนแผนภูมิอิสระ และรูปสำหรับวิเคราะห์งานเสมือนได้ดังนี้



FBD ของโครงสร้าง



รูปสำหรับวิเคราะห์งานเสมือน

เขียนสมการงานเสมือนได้ดังนี้

$$-m_1 g\delta y_D - m_2 g\delta y_E - T\delta y_B - P\delta x_C = 0$$

จากรูปจะได้ว่า ;

$$y_B = \ell \sin\theta$$

$$\delta y_B = \ell \cos\theta\delta\theta$$

$$y_D = y_E = \frac{\ell}{2}\sin\theta$$

$$\delta y_D = \delta y_E = \frac{\ell}{2}\cos\theta\delta\theta$$

$$x_C = 2\ell\cos\theta$$

$$\delta x_C = -2\ell\sin\theta\delta\theta$$

แทนค่าในสมการงานเสมือนจะได้ว่า ;

$$-m_1 g\frac{\ell}{2}\cos\theta\delta\theta - m_2 g\frac{\ell}{2}\cos\theta\delta\theta - T\ell\cos\theta\delta\theta + 2P\ell\sin\theta\delta\theta = 0$$

$$-m_1 g\ell\cos\theta - m_2 g\ell\cos\theta - 2T\ell\cos\theta + 4P\ell\sin\theta = 0$$

$$P = \frac{(m_1 g\ell\cos\theta + m_2 g\ell\cos\theta + 2T\ell\cos\theta)}{(4\ell\sin\theta)}$$
$$= \frac{(m_1 g + m_2 g + 2T)\ell\cos\theta}{4\ell\sin\theta}$$
$$= \frac{(m_1 g + m_2 g + 2T)}{4\tan\theta}$$

แทนค่าจะได้ว่า $\theta = 60°$, $m_1 = 5\ kg$, $m_2 = 10\ kg$

ดังนั้น $P = 78.97\ N$ **ตอบ**

7.4 การวิเคราะห์โครงสร้างที่มีองศาความเป็นอิสระมากกว่าหนึ่ง

ในกรณีที่โครงสร้างมีองศาความเป็นอิสระมากกว่าหนึ่ง จะมีจำนวนสมการงานเสมือนเท่ากับค่าองศาความเป็นอิสระของโครงสร้างนั้น ส่วนการติดตั้งระบบพิกัด และการพิจารณาตัดแรงที่ไม่ทำให้เกิดงาน และการคิดเครื่องหมายบวก - ลบยังคงทำเหมือนกับกรณีโครงสร้างที่มีองศาความเป็นอิสระเท่ากับหนึ่ง (หัวข้อ7.3) ทุกประการ แต่ความแตกต่างคือการเขียนรูปสำหรับวิเคราะห์งานเสมือน ดังนั้นจะขอกล่าวถึงเฉพาะวิธีการเขียนรูปสำหรับวิเคราะห์งานเสมือนเท่านั้น

วิธีการเขียนรูปสำหรับวิเคราะห์งานเสมือน ในกรณีค่าองศาความเป็นอิสระมากกว่าหนึ่งเป็นดังนี้

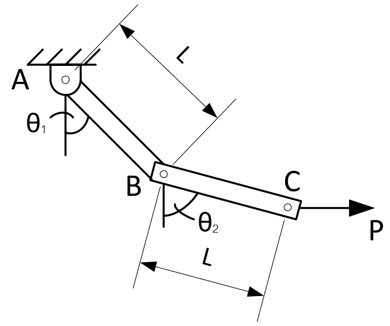
7.4.1 จำนวนรูปสำหรับวิเคราะห์งานเสมือน จะมีค่าเท่ากับองศาความเป็นอิสระของโครงสร้าง

7.4.2 ในการเขียนรูปสำหรับพิกัดอิสระตัวแรก ให้ตรึงชิ้นส่วนที่ขึ้นกับพิกัดอิสระตัวอื่นๆให้หมด แล้วเขียนแนวการเคลื่อนตัวของโครงสร้างเมื่อพิกัดอิสระตัวแรกเปลี่ยนไป

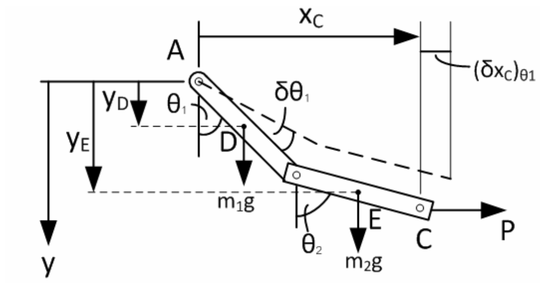
7.4.3 ในการเขียนรูปสำหรับพิกัดอิสระตัวที่สอง ให้ตรึงชิ้นส่วนที่ขึ้นกับพิกัดอิสระตัวอื่นๆให้หมด แล้วเขียนรูปการเคลื่อนตัวของโครงสร้างเมื่อพิกัดอิสระตัวที่สองเปลี่ยนไป

7.4.3 เขียนรูปซ้ำสำหรับทุกพิกัดอิสระ

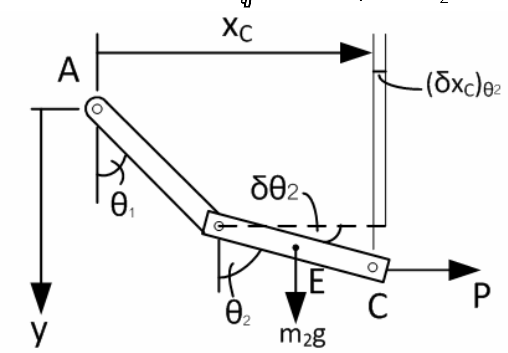
ตัวอย่าง 7.4 จากรูปจงหาตำแหน่งที่สมดุลของโครงสร้างต่อไปนี้ หากชิ้นส่วน AB หนัก 5 กิโลกรัม และชิ้นส่วน BC หนัก 10 กิโลกรัม



วิธีทำ จากโจทย์เราจะพบว่ามีพิกัดอิสระที่จำเป็น 2 ตัว ในการบอกตำแหน่งคือ θ_1 และ θ_2 ดังนั้น จะมีรูปสำหรับวิเคราะห์งานเสมือนสองรูปดังนี้



รูปสำหรับวิเคราะห์งานเสมือนรูปที่หนึ่ง (ตรึง θ_2 และขยับ θ_1)



รูปสำหรับวิเคราะห์งานเสมือนรูปที่สอง (ตรึง θ_2 และขยับ θ_1)

เขียนสมการงานเสมือนสำหรับรูปที่หนึ่ง

$$m_1 g(\delta y_D)_{\theta_1} + m_2 g(\delta y_E)_{\theta_1} + P(\delta x_C)_{\theta_1} = 0 \qquad \text{(A)}$$

เขียนสมการงานเสมือนสำหรับรูปที่สอง

$$m_2 g(\delta y_E)_{\theta_2} + P(\delta x_C)_{\theta_2} = 0 \qquad \text{(B)}$$

จากรูปสำหรับวิเคราะห์งานเสมือนทั้งสองรูป จะพบว่า

$$y_D = \frac{\ell}{2}\cos\theta_1$$

$$(\delta y_D)_{\theta_1} = -\frac{\ell}{2}\sin\theta_1\delta\theta_1$$

$$y_E = \ell\cos\theta_1 + \frac{\ell}{2}\cos\theta_2$$

$$(\delta y_E)_{\theta_1} = -\ell\sin\theta_1\delta\theta_1$$

$$(\delta y_E)_{\theta_2} = -\frac{\ell}{2}\sin\theta_2\delta\theta_2$$

$$x_C = \ell\sin\theta_1 + \ell\sin\theta_2$$

$$(\delta x_C)_{\theta_1} = \ell\cos\theta_1\delta\theta_1$$

$$(\delta x_C)_{\theta_2} = \ell\cos\theta_2\delta\theta_2$$

จากสมการ (A); $-m_1 g\frac{\ell}{2}\sin\theta_1\delta\theta_1 - m_2 g\ell\sin\theta_1\delta\theta_1 + P\ell\cos\theta_1\delta\theta_1 = 0$

$$(-m_1 g\frac{\ell}{2} - m_2 g\ell)\sin\theta_1 + P\ell\cos\theta_1 = 0 \qquad \text{(C)}$$

จากสมการ (B); $-m_2 g\frac{\ell}{2}\sin\theta_2\delta\theta_2 + P\ell\cos\theta_2\delta\theta_2 = 0$

$$-m_2 g\frac{\ell}{2}\sin\theta_2 + P\ell\cos\theta_2 = 0 \qquad \text{(D)}$$

จากสมการ (C);

$$\frac{\sin\theta_1}{\cos\theta_1} = \frac{P\ell}{[\frac{m_1 g}{2} + m_2 g]\ell}$$

$$\tan\theta_1 = \frac{p}{[\frac{m_1 g}{2} + m_2 g]}$$

$$\theta_1 = \tan^{-1}\frac{p}{(\frac{m_1}{2} + m_2)g}$$

จากสมการ (D);

$$\frac{\sin\theta_2}{\cos\theta_2} = \frac{P\ell}{[m_2 g\frac{\ell}{2}]}$$

$$\tan\theta_2 = \frac{2P}{[m_2 g]}$$

$$\theta_2 = \tan^{-1}(\frac{2P}{m_2 g})$$

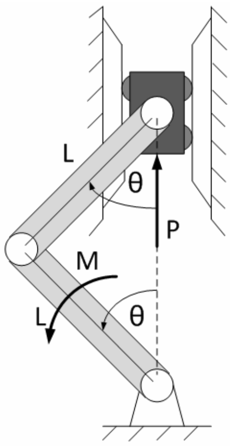
ดังนั้น ตำแหน่งที่ทำให้โครงสร้างนี้เกิดสมดุลคือ

$$\theta_1 = \tan^{-1} \frac{P}{(\frac{m_1}{2} + m_2)g}$$

$$\theta_2 = \tan^{-1} \frac{2P}{(m_2 g)}$$

แบบฝึกหัดเสริมประสบการณ์

1. จากรูปมีลูกสูบติดตั้งบนตัวรองรับเรียบลื่น ที่ลูกสูบมีแรง P กระทำในทิศดันขึ้น จงหาขนาดของโมเมนต์ที่ทำให้โครงสร้างนี้อยู่ในสภาวะสมดุล



วิธีทำ เขียนแผนภูมิอิสระ และรูปสำหรับวิเคราะห์งานเสมือนได้ดังนี้

เขียนสมการงานเสมือนได้ดังนี้...

หาความสัมพันธ์ของระยะต่างๆ กับพิกัดอ้างอิง ดังนี้..

....

....

....

....

....

....

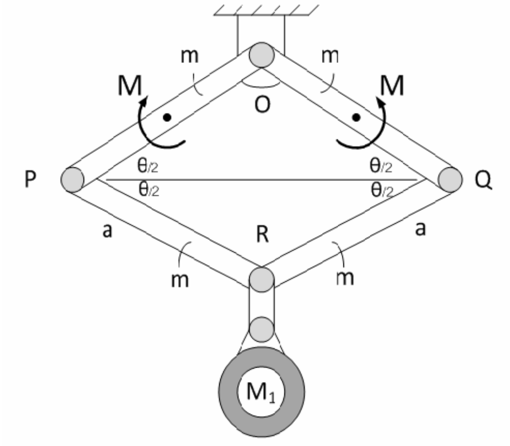
....

....

....

....

2. จากรูปมวล M ถูกแขวนไว้กับโครงสร้างที่แต่ละชิ้นมีมวล m และมีความยาว a จงหาขนาดของโมเมนต์ที่ทำให้โครงสร้างนี้อยู่ในสภาวะสมดุล



วิธีทำ เขียนแผนภูมิอิสระ และรูปสำหรับวิเคราะห์งานเสมือนได้ดังนี้

เขียนสมการงานเสมือนได้ดังนี้...

หาความสัมพันธ์ของระยะต่างๆ กับพิกัดอ้างอิง ดังนี้...

....

....

....

....

....

....

....

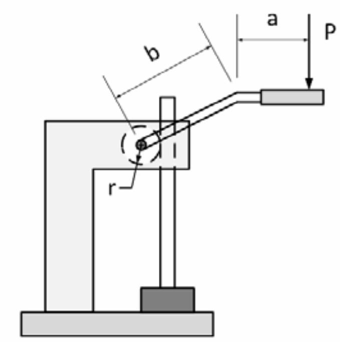
....

....

....

....

3. จากรูป แสดงแท่นกดโดยหัวกดเป็นก้านตรงที่มีเฟืองตรงอยู่ที่บริเวณตอนปลายของก้านกด และที่ปลายก้านโยกจะมีเฟืองสำหรับส่งกำลังมาที่หัดกด โดยเฟืองนี้มีรัศมี r หากออกแรง P กดก้านกดนี้ จงหาขนาดของแรงกดที่แท่นหัวกดในขณะที่อยู่ในสภาวะสมดุล



วิธีทำ เขียนแผนภูมิอิสระ และรูปสำหรับวิเคราะห์งานเสมือนได้ดังนี้

เขียนสมการงานเสมือนได้ดังนี้...

หาความสัมพันธ์ของระยะต่างๆ กับพิกัดอ้างอิง ดังนี้...

....

....

....

....

....

....

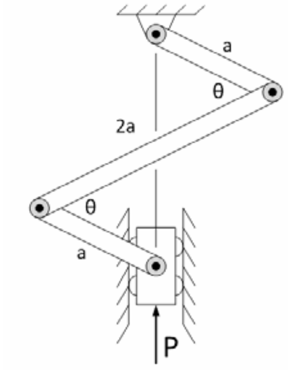
....

....

....

....

4. จากรูปลูกเลื่อนมวล M ถูกแขวนไว้กับโครงสร้างที่ชิ้นส่วนมีมวล m กโลกรัมต่อหน่วยความยาว (a) จงหาขนาดของแรง P ที่ทำให้โครงสร้างนี้อยู่ในสภาวะสมดุล



วิธีทำ เขียนแผนภูมิอิสระ และรูปสำหรับวิเคราะห์งานเสมือนได้ดังนี้

เขียนสมการงานเสมือนได้ดังนี้...

หาความสัมพันธ์ของระยะต่างๆ กับพิกัดอ้างอิง ดังนี้...

....

....

....

....

....

....

....

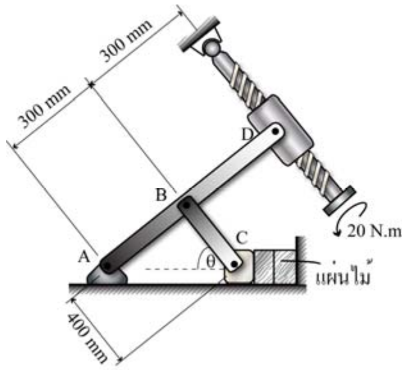
....

....

....

....

5. เครื่องอัดไม้อันหนึ่ง ใช้ต้นกำลังเป็นเกลียวสี่เหลี่ยม ขนาดเส้นผ่านศูนย์กลางเฉลี่ยเท่ากับ 20 mm เกลียวเคลื่อนที่ได้ระยะ 2 mm ต่อการหมุน 1 รอบ (lead=2 mm) สัมประสิทธิ์ความเสียดทานสถิตย์บนพื้นผิวเกลียวมีค่าเท่ากับ 0.2 หากที่ปลายของเกลียวเป็นจุดรองรับแบบ Ball and Socket ซึ่งไม่มีความฝืด จงหาแรงกดที่ C กดแผ่นไม้ หากในตอนเริ่มต้นออกแรงบิดเกลียวด้วยโมเมนต์ขนาด 20 N.m



วิธีทำ เขียนแผนภูมิอิสระ และรูปสำหรับวิเคราะห์งานเสมือนได้ดังนี้

เขียนสมการงานเสมือนได้ดังนี้...

หาความสัมพันธ์ของระยะต่างๆ กับพิกัดอ้างอิง ดังนี้...

....

....

....

....

....

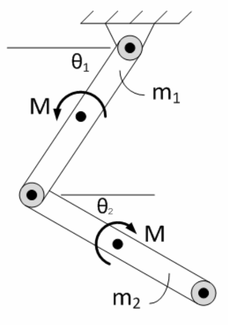
....

....

....

....

6. จากรูปจงหาขนาดของโมเมนต์ที่ทำให้ก้านแขวนมวล m_1 และ m_2 อยู่ในสภาวะสมดุล



วิธีทำ เขียนแผนภูมิอิสระ และรูปสำหรับวิเคราะห์งานเสมือนได้ดังนี้

เขียนสมการงานเสมือน 1. ได้ดังนี้..

เขียนสมการงานเสมือน 2. ได้ดังนี้..

หาความสัมพันธ์ของระยะต่างๆ กับพิกัดอ้างอิง ดังนี้...

....

....

....

....

....

....

....

....

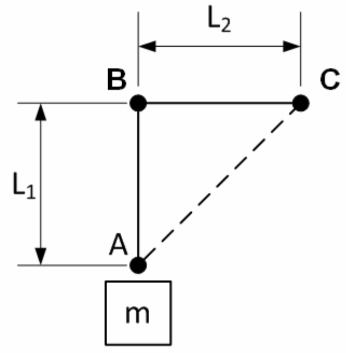
....

....

....

7.5 งานจากแรงอนุรักษ์ พลังงานศักย์ การวิเคราะห์งานและพลังงาน และกฎการอนุรักษ์พลังงาน

พิจารณาแรงเสียดทานที่เกิดขึ้นกับวัตถุที่เคลื่อนที่ไปบนพื้นราบจากจุด A ไปยังจุด B ดังแสดงในรูปที่ 7.5 จากรูปแสดงมุมจากด้านบนมองลงมายังวัตถุ



รูปที่ 7.5 แสดงการเคลื่อนที่ของมวล m เมื่อมองจากด้านบน (Top view)

หากกำหนดให้วัตถุนี้มีมวล m และผิวสัมผัสระหว่างมวล m กับพื้นที่มีค่าสัมประสิทธิ์ความเสียดทาน μ เราจะพบว่างานของแรงเสียดทานที่คำนวณได้จากการเคลื่อนที่ของมวลนี้โดยเคลื่อนที่ในเส้นทาง $A-B-C$ หาได้จาก

$$W_{f,A-B-C} = -(\mu mgL_1 + \mu mgL_2) \qquad (7.12)$$

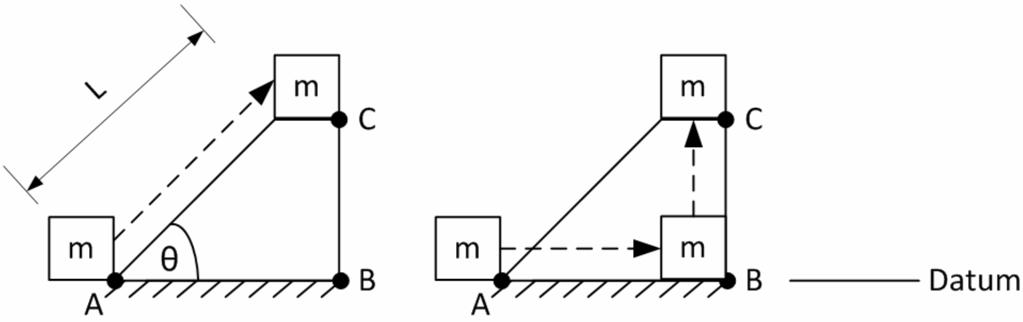
และงานของแรงเสียดทานที่คำนวณได้จากการเคลื่อนที่ของมวลนี้ในเส้นทาง A-C หาได้จาก

$$W_{f,A-B} = -(\mu mg\sqrt{L_1^2 + L_1^2}) \qquad (7.13)$$

เราจะพบว่างานของแรงเสียดทานที่ได้จากสมการ (7.12) และสมการ (7.13) มีค่าไม่เท่ากัน ดังนั้นสรุปได้ว่างานที่ได้จากแรงเสียดทานจะขึ้นกับเส้นทางที่วัตถุนั้นเคลื่อนที่ไป

คราวนี้ลองพิจารณางานเนื่องจากแรงโน้มถ่วง ที่เกิดกับวัตถุที่เคลื่อนที่ไปบนทางลาดเอียงดังแสดงรูปที่ 7.6 ในรูป ก แสดงเส้นทางการเคลื่อนที่ไปบนผิวลาดเอียง และรูป ข แสดงเส้นทางการเคลื่อนที่ตามแนวราบ แล้วเคลื่อนที่ขึ้นตามแนวดิ่ง เราพบว่างานจากแรงโน้มถ่วงที่คำนวณได้จากการเคลื่อนที่ตามเส้นทางที่แสดงในรูปที่ 7.6 ก หาได้จาก

$$W_{mg,A-C} = -[(mg\sin\theta)(L)] \qquad (7.14)$$



ก. ข.

รูปที่ 7.6 แสดงการเคลื่อนที่ของมวล m บนทางลาดเอียง

และงานเนื่องจากแรงโน้มถ่วง ที่คำนวณจากเส้นทางการเคลื่อนที่ $A-B-C$ ในรูปที่ 7.6 ข หาได้จาก

$$W_{mg,A-B-C} = W_{mg,A-B} + W_{mg,BC}$$

เนื่องจากเส้นทาง AB ตั้งฉากกับแรงโน้มถ่วง, ทำให้ $W_{mg,A-B} = 0$

ดังนั้น $$W_{mg,A-B-C} = 0 + [-mg(L\sin\theta)] \qquad (7.15)$$

จะพบว่าค่าที่ได้จากสมการ (7.14) และ (7.15) มีค่าเท่ากันดังนั้น สรุปได้ว่า งานเนื่องจากแรงโน้มถ่วงจะไม่ขึ้นกับเส้นทางการเคลื่อนที่ของวัตถุ แต่ขึ้นกับตำแหน่งเริ่มต้นและตำแหน่งสุดท้ายที่วัตถุเคลื่อนที่ไป

จากการพิจารณาทั้งสองกรณีข้างต้น เราจะพบว่างานที่เกิดจากแรงนั้น สามารถแบ่งได้ 2 แบบ คือ งานที่ขึ้นกับเส้นทางการเคลื่อนที่ กับงานที่ไม่ขึ้นกันเส้นทางการเคลื่อนที่แต่ขึ้นกับตำแหน่งเริ่มต้นและตำแหน่งสุดท้ายของการเคลื่อนที่ เราเรียกแรงที่ทำให้เกิดงานที่ไม่ขึ้นกับเส้นทางการเคลื่อนที่แต่ขึ้นกับตำแหน่งเริ่มต้นและตำแหน่งสุดท้ายว่า “แรงอนุรักษ์ (Conservative force)” แรงอนุรักษ์ที่ควรรู้จักได้แก่ แรงโน้มถ่วง และแรงยืดหยุ่น

หากเรากำหนดให้ใช้สัญลักษณ์ U_{con} แทนงานจากแรงอนุรักษ์ และ U_{uncon} แทนงานจากแรงไม่อนุรักษ์ เราจะเขียนสมการงานเสมือน (สมการที่ 7.11) ได้เป็น

$$\delta U_{con} + \delta U_{uncon} = 0 \qquad (7.16)$$

หากกำหนดให้ V แทนพลังงานศักย์ โดยคิดเปรียบเทียบกับเส้นอ้างอิง (Datum) จะได้ว่า

$$\delta U_{con} = -\delta V \qquad (7.17)$$

(สาเหตุที่กำหนดความสัมพันธ์ระหว่างงานอนุรักษ์และพลังงานศักย์ ดังสมการที่ 7.17 ให้พิจารณาจากรูปที่ 7.6 และสมการ 7.15 ประกอบกัน จะพบว่า พลังงานศักย์เทียบกับเส้นอ้างอิงจะมีค่าเพิ่มขึ้นเป็นบวก ในขณะที่งานอนุรักษ์จะมีค่าลบ)

แทนสมการ(7.17) ลงในสมการ (7.16) แล้วจัดรูปสมการจะได้ **สมการความสัมพันธ์ระหว่างงานและพลังงาน (Work – energy equation)** ดังนี้

$$\delta U_{uncon} = \delta V \qquad (7.18)$$

สมการนี้เป็นสมการสมดุลในกรณีแยกเอางานจากแรงอนุรักษ์ออกจากงานจากแรงไม่อนุรักษ์ ในกรณีที่ระบบที่พิจารณาอยู่นั้น มีเฉพาะแรงอนุรักษ์กระทำกับระบบ เทอม δU_{uncon} จะหายไปดังนั้นสมการ (7.18) จะลดรูปเหลือเป็น **สมการกฏการอนุรักษ์พลังงาน (Law of energy conservation)** สำหรับปัญหาทางกลศาสตร์

$$\delta V = 0 \qquad (7.19)$$

สมการนี้เป็นสมการสมดุลในกรณีที่ระบบที่พิจารณาอยู่มีแรงอนุรักษ์มากระทำเท่านั้น เช่นเดียวกันกับกรณีงานเสมือนทั่วไปที่กล่าวมาก่อนหน้านี้จำนวนสมการสมดุลที่มีได้จากสมการ (7.19) จะมีจำนวนเท่ากับองศาความเป็นอิสระของโครงสร้างนั้น โดยรูปแบบสมการสมดุลที่สร้างจากสมการ (7.19) ในรูปอนุพันธ์ตามกฏลูกโซ่ (Chin rule) จะเขียนได้เป็น

$$\delta V = \frac{\partial V}{\partial \pi_1}\delta\pi_1 + \frac{\partial V}{\partial \pi_2}\delta\pi_2 + \frac{\partial V}{\partial \pi_3}\delta\pi_3 + \ldots + \frac{\partial V}{\partial \pi_n}\delta\pi_n = 0 \qquad (7.20)$$

เมื่อ $\pi_1, \pi_2, \pi_3, ..., \pi_n$ เป็นพิกัดอิสระที่ใช้ในการบอกตำแหน่งของจุดต่างๆ บนโครงสร้างจากสมการ (7.20) จะพบว่า $\delta\pi_1, \delta\pi_2, \delta\pi_3, ..., \delta\pi_n$ ไม่เท่ากับศูนย์ ดังนั้นสมการ (7.20) จะมีค่าเท่ากับศูนย์ได้เมื่อ

$$\frac{\partial V}{\partial \pi_1} = 0, \frac{\partial V}{\partial \pi_2} = 0 ,..., \frac{\partial V}{\partial \pi_n} = 0 \qquad (7.21)$$

สมการ (7.21) นี้เป็นเงื่อนไขสมดุลในกรณีที่ระบบที่พิจารณามีเฉพาะพลังงานศักย์เกิดขึ้นเท่านั้น และพึงระลึกไว้เสมอว่าจำนวนสมการ (7.21) ที่เกิดขึ้นได้จะมีค่าเท่ากับองศาความเป็นอิสระของโครงสร้างนั้น

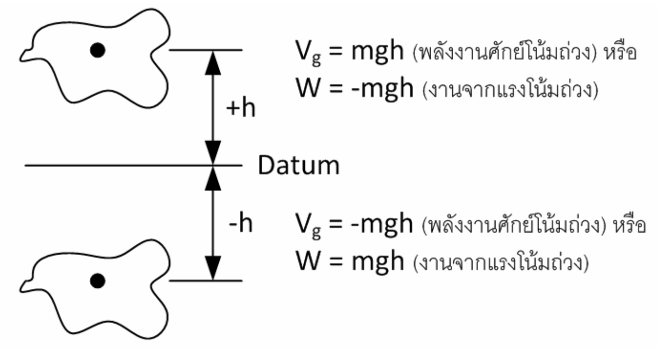
7.6 พลังงานศักย์

พลังงานศักย์ (Potential energy) ที่จะกล่าวถึงในที่นี้จะกล่าวถึง เฉพาะพลังงานศักย์โน้มถ่วง (Gravitational potential energy) และพลังงานศักย์ยืดหยุ่น (Elastic potential energy)

7.6.1 พลังงานศักย์โน้มถ่วง (V_g) พลังงานศักย์โน้มถ่วงเกิดจากงานที่ทำโดยแรงโน้มถ่วง ดังที่กล่าวไว้ก่อนหน้านี้ในหัวข้อที่ 7.5 เราทราบว่าแรงโน้มถ่วงเป็นแรงอนุรักษ์ ดังนั้นงานจากแรงโน้มถ่วงจึงเป็นงานจากแรงอนุรักษ์ ด้วยเหตุนี้เราจึงจัดมันเป็นพลังงานศักย์ และเรียกมันว่าพลังงานศักย์โน้มถ่วง ในการคิดขนาดของพลังงานศักย์โน้มถ่วงจะคิดเทียบกับเส้นอ้างอิง ที่เรียกว่า “Datum” เส้นอ้างอิงนี้ควรติดไว้ผ่านจุดตรึงแน่น (Fixed point) ของโครงสร้างที่ทำการวิเคราะห์ หากรูปที่ 7.7 แสดงระยะของแรงโน้มถ่วงที่กระทำต่อวัตถุเทียบกับ Datum จะพบว่าพลังงานศักย์ถ่วง (V_g) หาได้จาก

$$V_g = mgh \qquad (7.22)$$

$$\delta V_g = mg\delta h \qquad (7.23)$$



รูปที่ 7.7 แสดงการคิดพลังงานศักย์ของวัตถุ

7.6.2 พลังงานศักย์ยืดหยุ่น (V_e) พลังงานศักย์ยืดหยุ่นเกิดจากแรงยืดหยุ่นที่เกิดขึ้นบนวัตถุ ตัวอย่างหนึ่งที่ชัดเจนของแรงยืดหยุ่น คือ แรงสปริง พิจารณาสปริงอันหนึ่งดังแสดงในรูปที่ 7.8 หากสปริงนั้นถูกยึดปลายข้างหนึ่ง และอีกข้างถูกปล่อยให้เป็นอิสระดังรูปที่ 7.8 ก เราเรียกความยาวสปริงในขณะที่ยังไม่มีการยืดหรือหดตัวนี้ว่า ”Uncompressed length หรือ Unstretched length”

เมื่อสปริงรับแรงดึงจะเกิดระยะยืดออกเทียบกับความยาวสปริงเริ่มต้น เป็นระยะ x ดังรูป ในทำนองเดียวกันสปริงจะหดลงเมื่อรับแรงกด ขนาดของแรงสปริงจะหาได้จาก

$$F = kx \qquad (7.24)$$

เมื่อ k เป็นค่านิจของสปริง (N/m)

พลังงานศักย์ยืดหยุ่นในกรณีสปริงสามารถหาได้จาก

$$V_e = \int_0^x F dx = \int_0^x kx dx$$

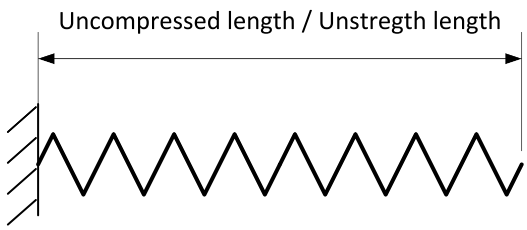
$$V_e = \frac{1}{2} kx^2 \qquad (7.25)$$

และ

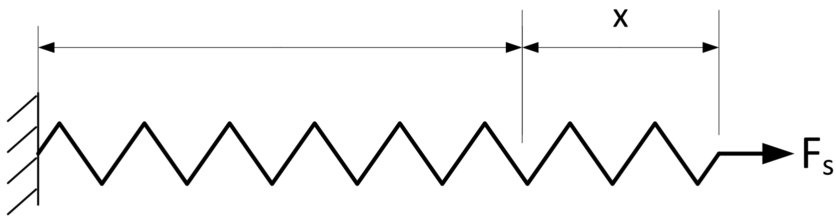
$$\delta V_e = kx\delta x \qquad (7.26)$$

ผลรวมพลังงานศักย์ทั้งหมด (ในที่นี้หมายถึงพลังงานศักย์โน้มถ่วง และพลังงานศักย์สปริงจะหาได้จาก

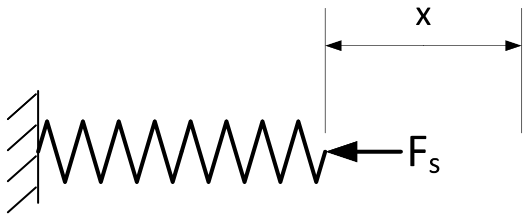
$$V = V_e + V_g$$



ก. แสดงสปริงก่อนรับแรง



ข. แสดงระยะยืด “ x ”



ค. แสดงระยะหด “ x ”

รูปที่ 7.8 แสดงระยะต่างๆ ของสปริง เมื่อรับแรง

7.7 หลักการพลังงานและเสถียรภาพของระบบสมดุล

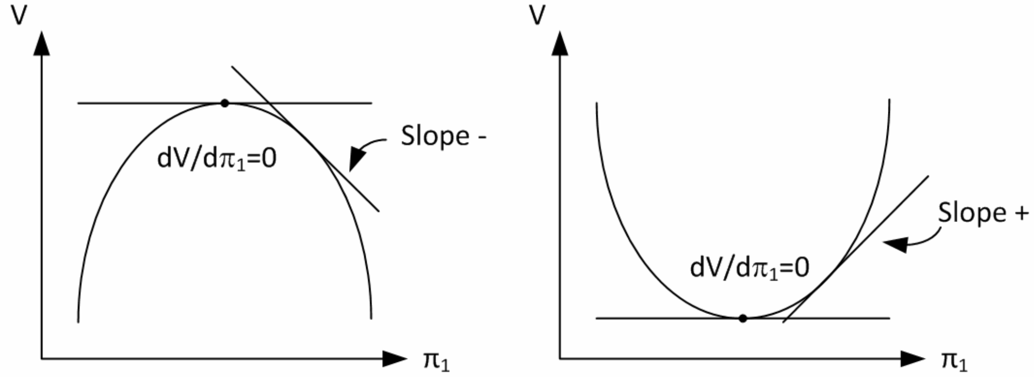
จากสมการ (7.21) เราพบว่าโครงสร้างที่ ไม่มีงานมากระทำ (เราเรียก U_{uncon} ว่างาน และเรียก U_{con} ว่าพลังงานศักย์) เงื่อนไขสมดุลของโครงสร้างที่สามารถบอกตำแหน่งต่างๆ บนโครงสร้างด้วยพิกัดอิสระ $\pi_1, \pi_2, \pi_3, ..., \pi_n$ สามารถเขียนได้เป็น

$$\frac{\partial V}{\partial \pi_1} = 0,\ \frac{\partial V}{\partial \pi_2} = 0\ ,...,\ \frac{\partial V}{\partial \pi_n} = 0$$

ในกรณีที่โครงสร้างนั้นขึ้นอยู่กับพิกัดอิสระเพียงตัวเดียว จะสามารถเขียนเงื่อนไขสมดุลของโครงสร้างได้เป็น

$$\frac{dV}{d\pi_1} = 0 \qquad (7.27)$$

ความหมายของสมการ (7.27) ในทางคณิตศาสตร์ คือ จุดที่มีพลังงานศักย์สูงสุด หรือจุดที่มีพลังงานศักย์ต่ำสุด (ดูรูปที่ 7.9 ประกอบ)



รูปที่ 7.9 แสดงความหมายทางคณิตศาสตร์ของสมการ (7.27)

ในทางคณิตศาสตร์ การตัดสินว่า $\frac{dV}{d\pi}$ เป็นจุดสูงสุดหรือจุดต่ำสุด จะทำโดยการทำอนุพันธ์อันดับสองของพลังงานศักย์ ($\frac{d^2V}{d\pi^2}$) หากค่าอนุพันธ์อันดับสองมีค่าเป็นลบ แสดงว่าเป็นจุดสูงสุด และพวกค่าอนุพันธ์อันดับสองมีค่าเป็นบวกแสดงว่าเป็นจุดต่ำสุด

จุดสูงสุด และจุดต่ำสุดของพลังงานศักย์นี้จะเป็นเกณฑ์ที่นำมาใช้ตัดสินว่าโครงสร้างนั้นอยู่ในสภาพสมดุลที่มีเสถียรภาพ (Stable) หรือไม่มีเสถียรภาพ (Unstable) วิธีพิจารณาเริ่มจากหลักคิดที่ว่า “ในธรรมชาติ สสารจะพยามอยู่ที่ในสภาวะที่มีพลังงานต่ำที่สุด” ดังนั้นสภาวะที่เสถียรก็ คือ สภาวะที่มีพลังงานต่ำที่สุดนั่นเอง

จากหลักการนี้เราจะพบได้ทันทีว่า หากพลังงานศักย์ของโครงสร้างมีค่าต่ำที่สุด โครงสร้างนั้นจะสมดุลแบบเสถียร (Stable equilibrium) และหากพลังงานศักย์ของโครงสร้างมีค่าสูงสุด โครงสร้างนั้นจะสมดุลแบบไม่เสถียร (Unstable equilibrium) ดังนั้นเงื่อนไขการพิจารณาเสถียรภาพของระบบในรูปแบบทางคณิตศาสตร์ จะเรียกได้เป็น

กรณีสมดุลเสถียร

$$\frac{dV}{d\pi_1} = 0$$

$$\frac{d^2V}{d\pi_1^2} > 0 \qquad (7.28)$$

กรณีสมดุลไม่เสถียร

$$\frac{dV}{d\pi_1} = 0$$

$$\frac{d^2V}{d\pi_1^2} < 0 \qquad (7.29)$$

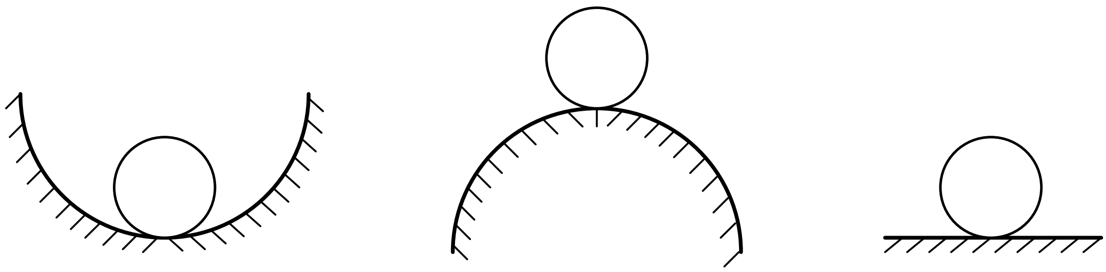
ในกรณีที่ $\frac{\partial^2 V}{\partial \pi^2}$ มีค่าเท่ากับศูนย์ เราจะเรียกการสมดุลในลักษณะนี้ว่า สมดุลสะเทิน (Neutral Equilibrium) หรือเขียนได้เป็น

กรณีสมดุลสะเทิน

$$\frac{dV}{d\pi_1} = 0$$

$$\frac{d^2V}{d\pi_1^2} = 0 \qquad (7.30)$$

เพื่อให้เกิดความเข้าใจทางกายภาพเกี่ยวกับสมดุลทั้งสามชนิดนี้ จะพิจารณาลูกบอลกลม ซึ่งวางตัวอยู่บนพื้นผิวสามแบบดังรูปที่ 7.10



ก. สมดุลเสถียร ข. สมดุลไม่เสถียร ค. สมดุลสะเทิน

รูปที่ 7.10 แสดงสภาพสมดุลแบบต่างๆ

จากรูปที่ 7.10ก จะพบว่าลูกบอลว่าหยุดนิ่งอยู่ในแอ่ง ในขณะที่มันหยุดนิ่งแสดงว่ามันอยู่ในสภาวะสมดุล หากเราจินตนาการว่ามีแรงขนาดเล็กน้อยมาผลักให้ลูกบอลนี้เคลื่อนที่

ออกจากจุดต่ำสุดของแอ่งนี้ นั่นคือ ลูกบอลจะเคลื่อนที่ออกจากจุดสมดุล แต่เมื่อเราปลดแรงเล็กๆ นี้ออก ลูกบอลจะเคลื่อนที่ไปมา และหยุดนิ่งที่ตำแหน่งเดิม จะเห็นว่าสำหรับระบบที่สมดุลเสถียรหากมีแรงใดๆ มาทำให้ระบบเสียสภาพสมดุลไป ระบบนั้นจะกลับมาสู่สมดุลที่ตำแหน่งเดิมได้ เมื่อแรงที่มากระทำให้ระบบเสียสมดุลนั้นหมดไป

จากรูปที่ 7.10ข จะพบว่าลูกบอลหยุดนิ่งอยู่บนยอดผิวโค้ง หากเราจินตนาการว่ามีแรงขนาดเล็กๆ มากระทำกับลูกบอลนี้ เราจะพบว่าลูกบอลจะเคลื่อนที่ออกจากจุดยอดสุดของผิวโค้ง (ตำแหน่งสมดุล) และมันจะไม่มีวันกลับมาหยุดอยู่ทีจุดยอดของผิวโค้งอีกเลย ในกรณี ดังรูปนี้ เราพบว่าจุดยอดสุดของผิวโค้งเป็นจุดสมดุล แต่เป็นจุดสมดุลที่มีพลังงานศักย์สูงสุด ดังนั้นเมื่อมีการรบกวนระบบ ระบบนั้นจะเสียสมดุลไปอย่างถาวร และจะไม่กลับมาสมดุลที่จุดเดิมอีกเลย การสมดุลของลูกบอลในลักษณะรูปที่ 7.10 ข. เรียกว่าสมดุลแบบไม่เสถียร

จากรูปที่ 7.10ค. จะพบว่าลูกบอลว่าอยู่บนผิวราบ หากเราจินตนาการว่ามีแรงเล็กๆ มากระทำลูกบอลนี้ เราจะพบว่ามันจะเคลื่อนที่ออกจากจุดสมดุลเดิม และเมื่อเราปลดแรงเล็กๆ นี้ออกลูกบอลจะไปหยุดนิ่งอยู่ที่ตำแหน่งใหม่ เราจะพบว่าแม้ว่าลูกบอลจะไม่สามารถกลับมาสมดุลที่ตำแหน่งเดิมได้อีก แต่มันก็สามารถมีตำแหน่งสมดุลตำแหน่งใหม่ ซึ่งเทียบเท่าจุดสมดุลเดิมได้ ดังนั้นสมดุลสะเทิน คือ สมดุลที่อาจเสียสมดุลได้หากมีแรงมารบกวนระบบ แต่เมื่อปลดแรงที่รบกวนระบบออกไปแล้วระบบจะไม่สามารถกลับมาสมดุลที่ตำแหน่งเดิม แต่จะสามารถหาสภาพสมดุลที่ตำแหน่งใหม่ได้

สำหรับโครงสร้างที่มีองศาความเป็นอิสระเท่ากับสองเกณฑ์ในการพิจารณาเสถียรภาพของระบบเป็นดังนี้

ในกรณีเสถียรภาพ

$$\frac{\partial V}{\partial \pi_1} = \frac{\partial V}{\partial \pi_2} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} [(\frac{\partial^2 V}{\partial \pi_1 \partial \pi_2})^2 - (\frac{\partial^2 V}{\partial \pi_1^2})(\frac{\partial^2 V}{\partial \pi_2^2})] < 0 \\ (\frac{\partial^2 V}{\partial \pi_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \pi_2^2}) > 0 \end{aligned}\right\} \qquad (7.31)$$

กรณีที่ไม่มีเสถียรภาพ

$$\frac{\partial V}{\partial \pi_1} = \frac{\partial V}{\partial \pi_2} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} [(\frac{\partial^2 V}{\partial \pi_1 \partial \pi_2})^2 - (\frac{\partial^2 V}{\partial \pi_1^2})(\frac{\partial^2 V}{\partial \pi_2^2})] < 0 \\ (\frac{\partial^2 V}{\partial \pi_1^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial \pi_2^2}) < 0 \end{aligned}\right\} \qquad (7.32)$$

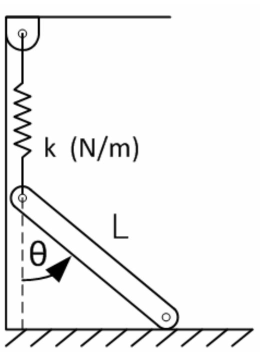
หลักการในการวิเคราะห์เสถียรภาพของโครงสร้าง

1. เขียนสมการ บรรยาย พลังงานศักย์ของระบบโดยคิดเทียบกับพิกัดอ้างอิงต่างๆ เช่นเดียวกับวิธีการงานเสมือน

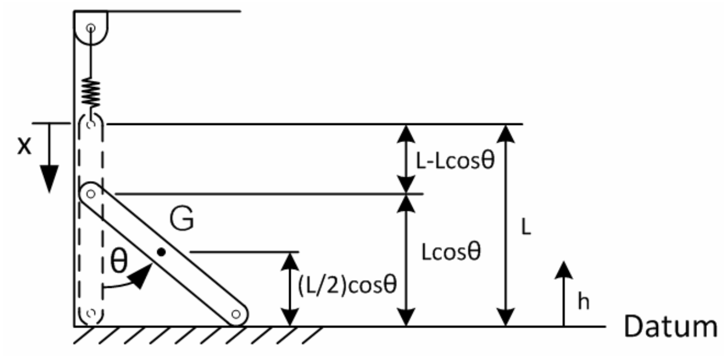
2. สร้างความสัมพันธ์ระหว่างพิกัดอิสระ (ซึ่งจะมีจำนวนเท่ากับองศาความเป็นอิสระ) และพิกัดต่างๆ ที่อ้างอิงในข้อ 1

3. ในขณะนี้จะได้สมการพลังงานศักย์ที่ขึ้นกับพิกัดอิสระเท่านั้น ทำการตรวจสอบสภาวะสมดุล จากเงื่อนไขสมดุล และตรวจสอบเสถียรภาพจากเงื่อนไขเสถียรภาพ จากสมการ (7.28) – (7.32)

ตัวอย่าง 7.4 มวล (m) อันหนึ่งแขวนติดอยู่กับสปริงที่มีค่านิจ k N/m ดังรูป จงหามุมที่ทำให้ระบบนี้อยู่ในสภาวะสมดุล หากระยะ Unstreteched Length ของสปริงอยู่ที่ตำแหน่งมุม $\theta = 0^o$ นอกจากนี้ให้ตรวจสอบเสถียรภาพของสมดุลที่ตำแหน่งมุม $\theta = 0^o$



วิธีทำ เขียนรูปขณะโครงสร้างเคลื่อนตัวไป ดังรูปต่อไปนี้



จากรูป ระยะยืดของสปริงที่ตำแหน่งใดๆ หาได้จาก

$$x = L - L\cos\theta$$

และระยะที่วัดจาก Datum หาได้จาก

$$h = \frac{L}{2}\cos\theta$$

จากสมการพลังงานศักย์ $V = V_e + V_g$

$$V = \frac{1}{2}kx^2 + mgh$$

แทนค่าจะได้ $V = \frac{1}{2}k(L - L\cos\theta)^2 + mg\frac{L}{2}\cos\theta$

ในกรณีองศาความเป็นอิสระเท่ากับหนึ่ง จากเงื่อนไขสมดุลจะได้ว่า;

$$\frac{dV}{d\theta} = 0$$

ดังนั้น $(\frac{1}{2}k)(2)(L - L\cos\theta)(L\sin\theta) - \frac{mgL}{2}\sin\theta = 0$

$$[k(L^2 - L^2\cos\theta) - \frac{mgL}{2}]\sin\theta = 0$$

จะพบว่ามี 2 เงื่อนไขที่ทำให้สมการนี้เท่ากับศูนย์ คือ

$$\sin\theta = 0 \qquad \text{(A)}$$

และ $[k(L^2 - L^2\cos\theta) - \frac{mgL}{2} = 0$ (B)

จากสมการ (A) $\sin\theta = 0$

ดังนั้น $\theta = 0$

จากสมการ (B) $k(L^2 - L^2\cos\theta) - \frac{mgL}{2} = 0$

$$kL^2(1 - \cos\theta) = \frac{mgL}{2}$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{mg}{2kL}$$

$$\theta = \cos^{-1}[1 - \frac{mg}{2kl}]$$

ดังนั้นจะมีมุม θ ที่ทำให้เกิดสมดุลได้ 2 ตำแหน่ง คือ ที่มุม $\theta = 0$ และมุม $\theta = \cos^{-1}[\frac{1-mg}{2kl}]$

ตรวจสอบเสถียรภาพจากเงื่อนไข

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} > 0 \qquad \text{สมดุลเสถียร}$$

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} < 0 \qquad \text{สมดุลไม่เสถียร}$$

ในปัญหาข้อนี้

$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = [k(L^2 - L^2\cos\theta) - \frac{mgL}{2}]\cos\theta + kL^2(\sin\theta)^2$$

ที่มุม 0 องศา แทนค่าจะได้

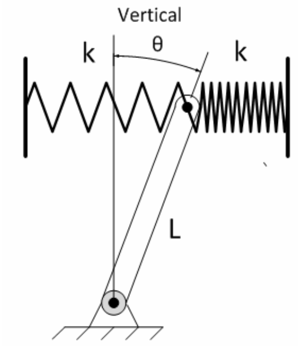
$$\frac{d^2V}{d\theta^2} = [k(L^2 - L^2\cos(0)) - \frac{mgL}{2}]\cos(0) + kL^2(\sin 0)^2$$

$$= \frac{-mgl}{2}$$

ดังนั้นสรุปได้ว่าที่มุม 0 องศาเป็นตำแหน่งที่โครงสร้างสมดุลแบบไม่เสถียร **ตอบ**

แบบฝึกหัดเสริมประสบการณ์

1. จากรูปก้านโลหะยาว L มีมวล m กิโลกรัมถูกหนุนปลายด้วยสปริงที่มีค่านิจ k นิวตัน/เมตร หากสปริงไม่ยืดหรือหดตัวที่มุม θ = 0 องศา จงหามุม θ ที่ทำให้ระบบนี้อยู่ในสภาวะสมดุล และจงตรวจสอบเสถียรภาพของระบบนี้



วิธีทำ เขียนรูปขณะโครงสร้างเคลื่อนตัวไป ดังรูปต่อไปนี้

จากสมการพลังงานศักย์ $V = V_e + V_g$

....

....

....

....

จากเงื่อนไขสมดุล $\dfrac{dV}{d\theta} = 0$

....

....

....

....

....

ตรวจสอบเสถียรภาพจากเงื่อนไข $\dfrac{d^2V}{d\theta^2} > 0$ สมดุลเสถียร

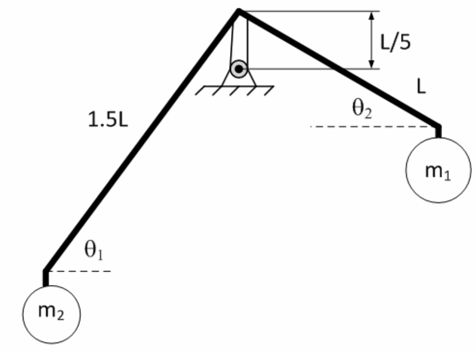
$\dfrac{d^2V}{d\theta^2} < 0$ สมดุลไม่เสถียร

....

....

....

2. จากรูปก้านโลหะยาว L มีมวล m_1 กิโลกรัมแขวนอยู่ที่ปลาย และปลายอีกข้างหนึ่งยาว 1.5L มีมวล m_2 กิโลกรัมแขวนอยู่ที่ปลาย หากก้านโลหะนี้ถูกแขวนไว้โดยมีตัวรองรับแบบสลัก รองรับอยู่ จงหามุม θ ที่ทำให้ระบบนี้อยู่ในสภาวะสมดุล และจงตรวจสอบเสถียรภาพของระบบนี้



วิธีทำ เขียนรูปขณะโครงสร้างเคลื่อนตัวไป ดังรูปต่อไปนี้

จากสมการพลังงานศักย์ $V = V_e + V_g$

....

....

....

....

จากเงื่อนไขสมดุล $\dfrac{dV}{d\theta} = 0$

....

....

....

....

....

ตรวจสอบเสถียรภาพจากเงื่อนไข $\dfrac{d^2V}{d\theta^2} > 0$ สมดุลเสถียร

$\dfrac{d^2V}{d\theta^2} < 0$ สมดุลไม่เสถียร

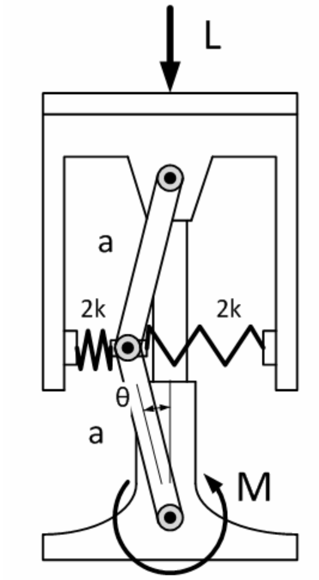
....

....

....

....

3. จากรูปก้านโลหะยาว a ถูกหนุนปลายด้วยสปริงที่มีค่านิจ 2k นิวตัน/เมตร จงหามุม θ ที่ทำให้ระบบนี้อยู่ในสภาวะสมดุล หากสปริงไม่ยืดหดตัวเมื่อมุม θ = 0 องศา



วิธีทำ เขียนรูปขณะโครงสร้างเคลื่อนตัวไป ดังรูปต่อไปนี้

จากสมการพลังงานศักย์ $V = V_e + V_g$

....

....

....

....

จากเงื่อนไขสมดุล $\dfrac{dV}{d\theta} = 0$

....

....

....

....

....

....

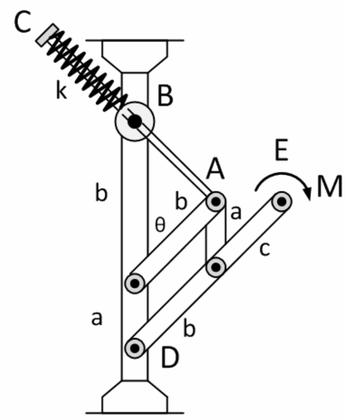
....

....

....

....

4. จากรูป ก้าน CA ถูกหมุนด้วยสปริงที่มีค่านิจ k นิวตัน/เมตร หากสปริงไม่ยืดหรือหดตัวที่มุม θ = 0 องศา จงหามุม θ ที่ทำให้ระบบนี้อยู่ในสภาวะสมดุล



วิธีทำ เขียนรูปขณะโครงสร้างเคลื่อนตัวไป ดังรูปต่อไปนี้

จากสมการพลังงานศักย์ $V = V_e + V_g$

....

....

....

....

จากเงื่อนไขสมดุล $\dfrac{dV}{d\theta} = 0$

....

....

....

....

....

....

....

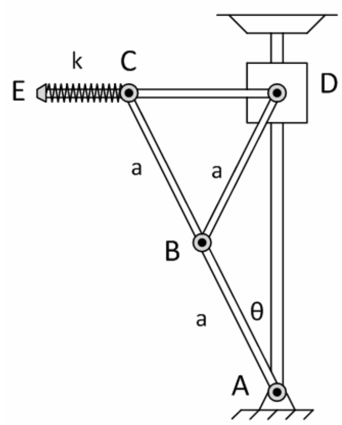
....

....

....

....

5. จากรูปก้าน DE ถูกหนุนปลายด้วยสปริงที่มีค่านิจ k นิวตัน/เมตร หากก้าน DE สามารถเคลื่อนผ่านร่องที่จุด C ได้โดยอิสระ และลูกเลื่อน D มีมวล m หากสปริงไม่ยืดหรือหดตัวที่มุม θ = 0 องศา จงหามุม θ ที่ทำให้ระบบนี้อยู่ในสภาวะสมดุล และจงตรวจสอบเสถียรภาพของระบบนี้



วิธีทำ เขียนรูปขณะโครงสร้างเคลื่อนตัวไป ดังรูปต่อไปนี้

จากสมการพลังงานศักย์ $V = V_e + V_g$

....

....

....

....

จากเงื่อนไขสมดุล $\dfrac{dV}{d\theta} = 0$

....

....

....

....

....

ตรวจสอบเสถียรภาพจากเงื่อนไข

....

....

....

....